



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
FACUDADE DE GEOFÍSICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

JORLIVAN LOPES CORRÊA

**CÁLCULO DE FILTROS COSSENO PELA ADAPTAÇÃO DO
MÉTODO DE ERROS RELATIVOS DE GUPTASARMA**

BELÉM
2010

JORLIVAN LOPES CORRÊA

**CÁLCULO DE FILTROS COSSENO PELA ADAPTAÇÃO DO
MÉTODO DE ERROS RELATIVOS DE GUPTASARMA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará em cumprimento as exigências para obtenção do título de Bacharel em Geofísica.

Orientador: Cícero Roberto Teixeira Régis

BELÉM
2010

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação(CIP)
Biblioteca Geólogo Raimundo Montenegro G. de Montalvão

C824c Cálculo de filtros cosseno pela adaptação do método de erros relativos de guptasarma/ Jorlivan Lopes Corrêa; Orientador: Cícero Roberto Teixeira Régis - 2010

x, 47 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Geofísica) - Faculdade de Geofísica, Universidade Federal do Pará, Belém, Quarto Período de 2010.

Orientador, Cícero Roberto Teixeira Régis.

1. Geofísica aplicada 2. Convolução Discreta. I. Régis, Cícero Roberto Teixeira, orient. II. Universidade Federal do Pará. III. Título.

CDD 20º ed.: 550

JORLIVAN LOPES CORRÊA

**CÁLCULO DE FILTROS COSSENO PELA ADAPTAÇÃO DO
MÉTODO DE ERROS RELATIVOS DE GUPTASARMA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará em cumprimento as exigências para obtenção do título de Bacharel em Geofísica.

Data de Aprovação: ____/____/____

Banca Examinadora:

Prof. Cícero Roberto Teixeira Régis - Orientador
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará

Prof. Paulo Roberto de Carvalho - Membro
Doutor em Geofísica
Universidade Federal Rural da Amazônia

Prof. Edelson da Cruz Luz - Membro
Mestre em Geofísica
Universidade Federal do Pará

A Deus pelo conhecimento e
aos meus pais pelo apoio.

AGRADECIMENTOS

Ao Curso de Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará, pelas condições oferecidas e ensinamentos.

Ao professor Cícero Roberto Teixeira Régis, pela orientação deste trabalho.

Aos membros da banca Paulo Roberto de Carvalho e Edelson da Cruz Luz.

RESUMO

Neste trabalho são mostrados os passos para o cálculo de filtros para transformadas cosseno, através de mínimos quadrados. Foram gerados filtros cosseno de 19, 30 e 40 pontos para serem comparados com os mais recentes da literatura. Os filtros gerados são aplicados para o cálculo do campo elétrico gerado por uma linha infinita de corrente sobre um semi-espaço homogêneo. Para o cálculo daquele campo, encontramos uma integral que tem solução analítica e é possível observar qual filtro mais se aproxima da mesma. Na maioria dos casos os novos filtros tiveram melhor comportamento, devido o novo analisar mais pontos dos parâmetros que definem o mesmo e fazer a escolha do filtro por uma adaptação do método sugerido por D.Guptasarma (1982).

Palavras Chaves: Geofísica. Convolução discreta.

ABSTRACT

In this work are shown the steps to calculate the cosine filter, using the least squares method. Were generated cosine filters of 19, 30 and 40 points to be compared with the more recent filters in literature. The Generated filters are applied to the calculation of the electric field generated by an infinite line current parallel to a homogeneous half - space. For the calculation of that field, we find an integral that has analytic solution and is possible what filter is closest to it. In most cases the new filters had better behaviour, because the new look more points in the parameters that defining it, and to make the choice of the filter by adjusting method suggested by D.Guptasarma (1982).

keywords:Geophysics. Discrete Convolution.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

2.1	Convolução gráfica. Fonte Pires, 2002.	17
4.1	Integrando da integral da linha de corrente infinita paralela a um semi-espaço.	25
4.2	Comparação entre o resultado analítico ($E_y a$) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 19 pontos ($E_y f$), sendo a frequência 0.01 Hz e a condutividade elétrica 0.001 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 19 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 19 pontos (a) Erro relativo das soluções numéricas em relação à analítica (b).	26
4.3	Comparação entre o resultado analítico ($E_y a$) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 30 pontos($E_y f$), sendo a frequência 0.01 Hz e a condutividade elétrica 0.001 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 30 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 30 pontos (a) Erro relativo das soluções numéricas em relação à analítica (b).	28
4.4	Comparação entre o resultado analítico ($E_y a$) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 40 pontos ($E_y f$), sendo a frequência 0.01 Hz e a condutividade elétrica 0.001 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 40 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 40 pontos (a) Erro relativo das soluções numéricas em relação à analítica (b).	29
4.5	Integrando da integral da linha de corrente infinita paralela a um semi-espaço com frequência de 1 Hz.	30

4.6	Comparação entre o resultado analítico ($E_y a$) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 19 pontos ($E_y f$), sendo a frequência 1.0 Hz e a condutividade elétrica 0.001 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 19 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 19 pontos (a) Erro relativo das soluções numéricas em relação à analítica (b).	31
4.7	Comparação entre o resultado analítico ($E_y a$) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 30 pontos ($E_y f$), sendo a frequência 1.0 Hz e a condutividade elétrica 0.001 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 30 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 30 pontos (a) Erro relativo das soluções numéricas em relação à analítica (b).	32
4.8	Comparação entre o resultado analítico ($E_y a$) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 40 pontos ($E_y f$), sendo a frequência 1.0 Hz e a condutividade elétrica 0.001 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 40 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 40 pontos (a) Erro relativo das soluções numéricas em relação à analítica (b).	34
4.9	Integrando da integral da linha de corrente infinita paralela a um semi-espaço com condutividade de 0.01 S/m	35
4.10	Comparação entre o resultado analítico ($E_y a$) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 19 pontos ($E_y f$), sendo a frequência 0.01 Hz e a condutividade elétrica 0.01 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 19 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 19 pontos (a) Erro relativo das soluções numericas em relação analítica (b).	36

4.11	Comparação entre o resultado analítico ($E_y a$) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 30 pontos ($E_y f$), sendo a frequência 0.01 Hz e a condutividade elétrica 0.01 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 30 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 30 pontos (a) Erro relativo das soluções numericas em relação analítica (b).	37
4.12	Comparação entre o resultado analítico ($E_y a$) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 40 pontos ($E_y f$), sendo a frequência 0.01 Hz e a condutividade elétrica 0.01 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 40 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 40 pontos (a) Erro relativo das soluções numericas em relação analítica (b).	38

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações	x	
1	INTRODUÇÃO	13
2	METODOLOGIA	15
2.1	APRESENTAÇÃO	15
2.1.1	Aplicação do Filtro a uma Integral Cosseno Indefinida	15
2.2	CONVOLUÇÃO	16
2.2.1	Integral de Convolução	16
2.2.2	Convolução Discreta	17
2.2.3	Mínimos Quadrados	18
3	FILTRO COSSENO	19
4	RESULTADOS	24
4.1	19 PONTOS	26
4.2	30 PONTOS	27
4.3	40 PONTOS	28
4.4	FREQUÊNCIA DE 1 Hz	30
4.5	19 PONTOS	31
4.6	30 PONTOS	32
4.7	40 PONTOS	33
4.8	CONDUTIVIDADE DE 1S/m	34
4.9	19 PONTOS	35
4.10	30 PONTOS	36
4.11	40 PONTOS	38
4.12	COMPARAÇÃO	39
5	CONCLUSÃO	40

REFERÊNCIAS	41
ANEXOS	42
ANEXO A - ABSCISSAS E PESOS DO FILTRO COSSENO DE 19 PONTOS	43
ANEXO B - ABSCISSAS E PESOS DO FILTRO COSSENO DE 30 PONTOS	45
ANEXO C - ABSCISSAS E PESOS DO FILTRO COSSENO DE 40 PONTOS	47

1 INTRODUÇÃO

O uso de filtros digitais para o cálculo numérico de integrais impróprias do tipo cosseno é uma prática comum na Geofísica, por sua praticidade e eficiência. Essa técnica permite realizar a integração com um número relativamente pequeno de avaliações do integrando, o que torna os filtros a maneira mais rápida, computacionalmente, para tratar daquelas integrais.

Por outro lado, a aproximação do valor da integral obtida com um filtro nem sempre é confiável. Ela depende fundamentalmente do comportamento da função sendo integrada e de sua relação com as integrais empregadas para a determinação dos valores de abcissas e pesos do filtro. A compreensão de como aqueles valores são gerados é importante para que o usuário dos filtros tenha clareza de quão perto seu problema está do tipo de integral com a qual cada filtro foi desenvolvido e do nível de aproximação que se pode esperar ao usar os filtros em cada caso.

Os filtros mais empregados na modelagem geofísica electromagnética são os de cosseno, seno, J_0 e J_1 , sendo os dois últimos os filtros das transformadas de Hankel. Os filtros cosseno e seno mais recentes foram publicados em 2002 (Almeida, 2002) e os J_0 e J_1 em 2007 (Kong, 2007). Nestes 8 anos o avanço na velocidade dos computadores foi contínuo e uma máquina hoje é muitas vezes mais veloz do que um computador de mesmo valor de 2002. Por isso, entendo que é hora de revisitar as técnicas de construção dos filtros digitais e usar o poder computacional atual para uma melhor determinação dos valores ótimos para os pesos e abcissas dos filtros.

Neste trabalho irei detalhar os passos de um método para determinação de valores de um filtro, tomando como exemplo a transformada cosseno, que aparece na modelagem dos campos gerados por uma linha de corrente sobre um semi-espaço. Para a determinação dos valores ótimos, empreguei o cluster do laboratório de Processamento Electromagnético (PROEM) do CPGf, realizando uma busca sistemática em grids mais detalhados do que era possível em 2002.

Os valores encontrados neste trabalho são comparados com os de Almeida (2002). Com os valores de filtros que calculei, consegui uma melhor aproximação para um mesmo número de pontos em cada caso.

Espero que o detalhamento do método que é feito neste texto seja útil para aqueles que forem empregar os filtros, de modo que o façam com mais clareza e conscientes dos limites do método.

O texto está dividido em 5 capítulos. No capítulo 2 descrevo a metodologia empregada para o cálculo do filtro. No capítulo 3 desenvolvo a matemática para calcular o filtro cosseno. No capítulo 4 são mostrados os resultados obtidos para o problema de calcular os campos da linha de corrente sobre um semi-espaço comparando com seu resultado analítico. O capítulo 5 apresenta a conclusão do trabalho e possíveis questões a serem estudadas em trabalhos futuros.

2 METODOLOGIA

2.1 APRESENTAÇÃO

A técnica dos filtros digitais para o cálculo de integrais impróprias vem sendo desenvolvidas desde a década de 1970.

Autores como Anderson (1979), D.Guptasarma (1982), Nissen & Enmark (1986) e Guptasarma & Singh (1997) são referências em filtros, sendo D.Guptasarma (1982), o qual propôs o método usado neste trabalho, usando um método de escolha dos parâmetros que definem o filtro, baseado na análise do erro relativo entre o resultado calculado com o filtro e a solução analítica de uma integral conhecida.

Anderson (1979) ressaltou em seu trabalho que com o uso de filtros, torna-se desnecessário o cálculo de funções de Bessel durante a integração numérica, já que seu trabalho esteve focado no cálculo de filtros de Hankel e na proposta de um programa computacional que poderia usar até 283 pontos de abscissas e pesos. Sendo testado em curvas de sondagem elétrica com arranjo Schlumberger.

D.Guptasarma (1982) propôs em seu trabalho a melhoria de filtros pequenos como de 7, 11 e 19 pontos para as curvas de resistividade aparente com o arranjo Schlumberger.

Nissen & Enmark (1986), contribuíram com a melhoria do filtro seno de 20 pontos. Propondo sua abscissa inicial e deslocamento através de testes para minimizar o erro relativo. Como teste aplicaram seu filtro no resultado do campo elétrico da linha de corrente em um espaço infinito e homogêneo.

Guptasarma & Singh (1997), ressaltaram algumas modificações feitas no método de mínimos-quadrados de Wiener-Hoft para o cálculo de filtros mais longos como os da transformada de Hankel J_0 de 47 e 120 pontos e J_1 de 47 e 140 pontos.

2.1.1 Aplicação do Filtro a uma Integral Cosseno Indefinida

Os parâmetros necessários para a aplicação de um filtro são: abscissa inicial (a_0), incremento (t) e os pesos (W). Como exemplo vou mostrar a aplicação de um filtro a

uma integral indefinida da forma (eq 2.1):

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(k_x) \cos(xk_x) dk_x \quad (2.1)$$

O resultado aproximado com a aplicação do filtro é:

$$H(x) = \frac{\sum_{i=1}^N h\left(\frac{e^{a_0+(i-1)t}}{x}\right) W_i}{x} \quad (2.2)$$

Em que N é o número de pontos do filtro e as abscissas do filtro são $e^{a_0+(i-1)t}$.

Na construção do filtro, serão usados conceitos de convolução, convolução discreta e da solução de mínimos quadrados para o sistema sobredeterminado. A seguir apresento uma breve descrição de cada um desses tópicos.

2.2 CONVOLUÇÃO

2.2.1 Integral de Convolução

A convolução de duas funções $f(t)$ e $w(t)$ é dada pela seguinte integral:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) w(t - \tau) d\tau \quad (2.3)$$

A operação de convolução representa a integração da multiplicação de duas funções tendo como resultado uma outra função, sendo que cada ponto desta função depende de vários valores das duas primeiras. Para esclarecer a idéia vamos observar seu comportamento graficamente, assim como Brigham (1988).

Na figura 2.1(a) e 2.1(b) vemos as funções que serão convolidas. Vamos adotar que a função $w(t)$ será a que irá variar com o fator τ , entretanto $f(t)$ poderia variar de igual forma, como consequência da propriedade comutativa da convolução. O passo seguinte é refletir a função w em relação ao eixo das ordenadas como mostrado na fig 2.1(c) e dada pela função $w(-t)$, em seguida é dado um deslocamento a função $w(-t)$, resultando na função $w(t - \tau)$, dessa forma aumentando τ gradativamente, o gráfico de w se desloca da esquerda para direita. Finalmente para o cálculo da integral é necessário a multiplicação e a integração (soma) das funções $f(t)$ e $w(t - \tau)$ (fig 2.1 (e)). O valor de cada ponto da função resultante da convolução é a soma da multiplicação das funções $f(t)$ e $w(t - \tau)$,

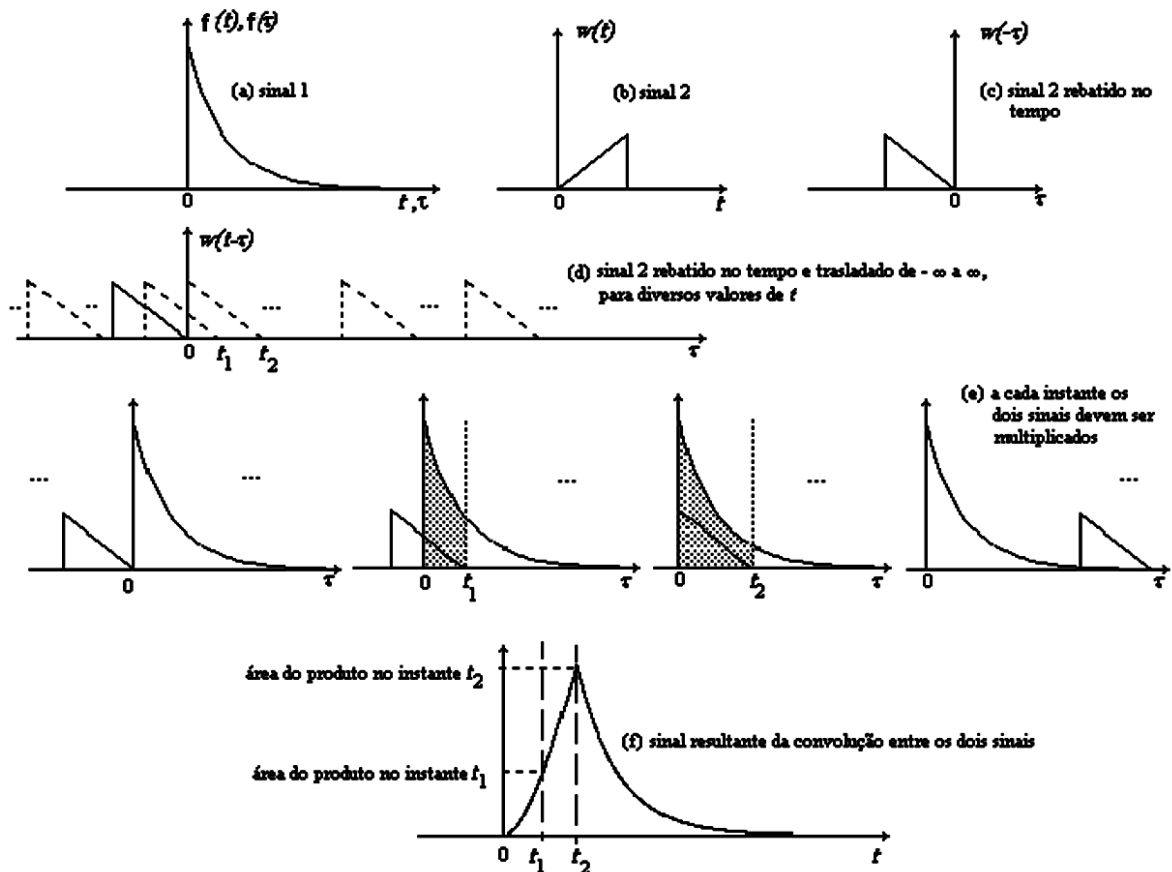


Figura 2.1: Convolução gráfica. Fonte Pires, 2002.

ou seja, o resultado varia com o t já que a integral está sendo calculada em τ , fig 2.1 (f).

2.2.2 Convolução Discreta

Quando trabalhamos com funções na forma discreta a convolução é descrita da seguinte forma (eq. 2.4):

$$H_j = \sum_{i=1}^N f_{j-i} w_i \quad j = 1, 2, \dots, M + N - 1 \quad (2.4)$$

$$f_{j-i} = 0, \text{ se } j - i < 0 \text{ ou } j - i > n \quad (2.5)$$

Primeiramente é necessário mudar a operação de integração (\int) pela sua análoga na forma discreta, o somatório (Σ). Também é preciso mudar os limites de integração de infinitos para números exatos, que no caso será de 1 a N , em que N é o número de elementos do filtro, w_i . Esta soma é feita para vários valores da função convolvida de M pontos, f , segundo a condição imposta sobre a mesma. Por fim, é colocada uma condição

para a função convolvida, f , para que ela se desloque, equação 2.5. Para fixar o conceito é interessante observar a forma matricial, pois ela mostra os mesmos passos da gráfica: reflexão, deslocamento, multiplicação e soma.

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_{m+n-3} \\ h_{m+n-2} \\ h_{m+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_2 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ f_3 & f_2 & f_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ f_m & f_{m-1} & f_{m-2} & \cdots & f_{m-n} \\ 0 & f_m & f_{m-1} & \cdots & f_{m-n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

2.2.3 Mínimos Quadrados

O sistema é sobredeterminado. Sendo assim, para termos uma solução útil, usaremos a solução de mínimos quadrados. Ele será usado várias vezes durante o cálculo, sempre buscando a minimização do erro entre o resultado obtido por meio do filtro e do resultado desejado que é a função de saída.

A solução de mínimos quadrados é aquela das chamadas “equações normais”, que na forma matricial se escreve:

$$F^F W = F^t H \quad (2.7)$$

3 FILTRO COSSENO

Para exemplificar o método para a construção do filtro, faremos a aplicação para a transformada cosseno, que resulta do cálculo do campo elétrico gerado por uma linha infinita de corrente. O nível de acurácia da integral calculada depende da similaridade entre a função que está sofrendo a transformada e aquela (com solução analítica) que foi empregada para construir o filtro (eq. 3.1). Neste caso vamos considerar as transformadas usadas por Rijo (1993). A transformada abaixo será usada como entrada e manipulada de modo a assumir a forma da equação (2.2):

$$\int_0^{\infty} k_x^2 \exp(-ak_x) \cos(xk_x) dk_x = 2a \frac{(a^2 - 3x^2)}{(a^2 + x^2)^3} \quad (3.1)$$

A integral 3.1 será tratada da mesma forma que Mohsen & Hashish (1994), Anderson (1979) e Christensen (1990), com as seguintes definições:

$$F(x) = 2a \frac{(a^2 - 3x^2)}{(a^2 + x^2)^3} \quad (3.2)$$

$$l_x = xk_x, \quad (3.3)$$

$$dl_x = xdk_x, \quad (3.4)$$

$$xF(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{l_x}{x}\right)^2 \exp\left(-a\left(\frac{l_x}{x}\right)\right) \cos(l_x) dl_x \quad (3.5)$$

Definindo a função f como sendo:

$$f\left(\frac{l_x}{x}\right) = \left(\frac{l_x}{x}\right)^2 e^{-a\left(\frac{l_x}{x}\right)}, \quad (3.6)$$

e as variáveis x e l_x em forma exponencial:

$$x = e^p, \quad (3.7)$$

$$l_x = e^s, \quad (3.8)$$

teremos

$$e^p F(e^p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{[-(p-s)]}) e^s \cos(e^s) ds. \quad (3.9)$$

A equação 3.9 é a integral de convolução:

- Função de Saída: $H(e^p) = e^p F(e^p)$;
- Função de Entrada: $f(e^{[-(p-s)]})$;
- Função Filtro: $e^s \cos(e^s)$.

Essas mudanças de variáveis devem ser aplicadas, também, ao resultado analítico da integral mostrada na equação 3.1:

$$H(e^p) = 2ae^p \frac{(a^2 - 3(e^p)^2)}{(a^2 + (e^p)^2)^3} \quad (3.10)$$

Com estas mudanças de variáveis, temos uma integral de convolução. Agora, para calcular numericamente o filtro cosseno é preciso transformar essa convolução da forma *contínua* para a *discreta*. Primeiramente é necessário discretizar as funções já citadas acima, definindo os seus respectivos números de elementos. Se discretizarmos a função de entrada f com m pontos e a função filtros w com n pontos, então a função de saída terá $(m + n - 1)$ pontos.

Para fazer a discretização é importante lembrar que $e^{[-(p-s)]} = k_x$. Então, discretizando de forma linear o expoente da exponencial, ela dependerá de dois parâmetros ξ e t , deslocamento e incremento, respectivamente, como em Almeida (2002) e mostrado abaixo:

$$e_i = e^{-(p-s)} = e^{(\xi+(i-1)t)}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.11)$$

$$f_i(e_i) = e_i^2 e^{-ae_i} \quad (3.12)$$

Da mesma forma, a função $H(x) = xF(x) = e^p F(e^p)$ será discretizada. Para isto, usaremos o mesmo incremento (t) usado para a função anterior, e o ponto inicial diferente, simplesmente acrescentando um número (a_0) ao ponto inicial já definido:

$$e_j = e^{p_j} = e^{(a_0+\xi+(j-1)t)}, \quad j = 1, 2, \dots, (m + n - 1) \quad (3.13)$$

$$H(e_j) = 2ae_j \frac{(a^2 - 3(e_j)^2)}{(a^2 + (e_j)^2)^3}. \quad (3.14)$$

Até aqui o problema numérico foi definido, o próximo passo será achar os valores de ξ , t e a_0 para se determinar o filtro.

Depois de todas essas mudanças na equação 3.1 se chega na forma da convolução da equação 3.9. Na forma discreta, a convolução será escrita $H_j = \sum_{i=1}^N f_{j-i}w_i$, na qual a contribuição da função $e^s \cos(e^s)$ está no conjunto de pesos W_i .

Para determinar os pesos $w_i(\xi, a_0, t)$, escrevemos a convolução discreta na forma matricial:

$$\mathcal{F}\mathcal{W} = \mathcal{H} \quad (3.15)$$

$$\begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_2 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & f_3 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ f_m & f_{m-1} & f_{m-2} & \cdots & f_{m-n} \\ 0 & f_m & f_{m-1} & \cdots & f_{m-n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_{m+n-3} \\ h_{m+n-2} \\ h_{m+n-1} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Este é um sistema sobredeterminado. Buscaremos, então, a solução de mínimos quadrados:

$$\mathcal{F}^T \mathcal{F} \mathcal{W} = \mathcal{F}^T \mathcal{H} \quad (3.17)$$

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{n-2} & r_{n-1} & r_n \\ r_2 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-3} & r_{n-2} & r_{n-1} \\ r_3 & r_2 & r_1 & \cdots & r_{n-4} & r_{n-3} & r_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n-2} & r_{n-1} & r_{n-2} & \cdots & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_{n-1} & r_{n-2} & r_{n-3} & \cdots & r_2 & r_1 & r_2 \\ r_n & r_{n-1} & r_{n-2} & \cdots & r_3 & r_2 & r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{m+n-3} \\ d_{m+n-2} \\ d_{m+n-1} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{F}^t \mathcal{F}$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{F}^t \mathcal{H}$$

A matriz \mathcal{R} é uma matriz *Toeplitz*, a qual tem todos os elementos de cada diagonal iguais. O sistema gerado pode ser resolvido facilmente por eliminação gaussiana. Com a resolução deste sistema são obtidos os valores dos pesos correspondentes a um terno (ξ, a_0, t) .

Então como buscar os melhores valores de abscissas e pesos, que aplicados a uma integral de interesse sejam o mais próximo possível do resultado analítico da mesma? Uma forma de resolver essa questão é efetuar uma busca sistemática, variando esses parâmetros nos intervalos $[\xi_i, \xi_f]$, $[a_{0i}, a_{0f}]$ e $[t_i, t_f]$ e observando ponto a ponto. Para escolher o mais eficiente, D.Guptasarma (1982) propôs um método de escolha pelo *erro relativo*, que é o módulo da diferença entre a solução numérica dada pelo filtro e a solução analítica da integral, dividida pelo módulo da solução analítica. A escolha é feita nas seguintes etapas: Para um ponto no espaço discretizado (ξ, a_0, t) geramos um filtro e o aplicamos à integral com solução analítica conhecida para um dado intervalo da variável x ; armazenamos o maior erro relativo no intervalo; repetimos estas operações para todos os pontos (ξ, a_0, t) e selecionamos como melhor ponto aquele que gerou o menor dentre os maiores erros relativos; fazemos, então, uma nova discretização mais refinada no entorno do ponto escolhido e repetimos todo o processo, o qual poderá gerar um novo ponto ótimo ou manter o anterior; para gerar o filtro mostrado aqui, repetimos o processo de refinamento 50 vezes. O ponto (ξ, a_0, t) ótimo é, então, o que foi selecionado na último nível de refinamento.

A cada refinamento, o comprimento dos intervalos nas três variáveis é reduzido à metade da seguinte maneira: se o ponto escolhido em um nível de discretização for $(\xi_{min}, a_{0min}$ e $t_{min})$ então os novos intervalos de busca serão :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\xi_i + \xi_m}{2}, \frac{\xi_f + \xi_m}{2} \right] \\ & \left[\frac{a_{0i} + a_{0m}}{2}, \frac{a_{0f} + a_{0m}}{2} \right] \\ & \left[\frac{t_i + t_m}{2}, \frac{t_f + t_m}{2} \right] \end{aligned}$$

A modificação que foi feita nesse método de escolha de D.Guptasarma (1982), foi que o mínimo e o seu terno correspondente são guardados mesmo com o afinamento da malha, já que eles podem ser o melhores filtros. Pois com o afinamento da malha há uma nova discretização, sendo assim o ponto que gerou o melhor mínimo no cálculo anterior não

fará parte desse novo conjunto, dessa forma sendo desconsiderado.

A integral com solução analítica conhecida que empregamos para gerar o filtro foi a mesma usada por Rijo (1993):

$$T(x) = \int_0^{\infty} \exp(-ak_x^2) \cos(k_x x) dk_x = \sqrt{\pi} \frac{\exp\left(\frac{-x^2}{4a^2}\right)}{2a} \quad (3.19)$$

4 RESULTADOS

Neste trabalho construímos filtros cossenos de 19, 30 e 40 pontos. Os dados de entrada para o cálculo dos filtros foram os intervalos de ξ , a_0 , t , considerados por Rijo (1993). Os intervalos são $[\ln(10^{-6}), \ln(10^{-1})]$, $[-16, -8]$ e $[0.4, 0.8]$, respectivamente, discretizados em 35, 50 e 15 pontos. Esses intervalos foram escolhidos de forma que contivessem os valores de abscissas e incrementos de filtros já existentes neste caso os de Rijo (1993).

A escolha do melhor filtro feita pela integral da equação 3.19 foi feita no intervalo de x de 10^{-5} a 10, com a constante a sendo 1. E foi feito 50 vezes o processo de afinamento dos intervalos das variáveis ξ , a_0 e t .

Os filtros encontrados serão aplicados no cálculo do campo $E_y(x, 0)$ da linha infinita de corrente paralela a interface dos semi-espacos e comparados com a sua solução analítica. As considerações que precisam ser feitas são: $z = h_0 = 0$, o ponto de observação será na interface do semi-espaco, sendo ambos não magéticos e o campo sob a condição quase estática, como mostrado por Rijo (2004), resultam:

Os valores dos novos filtros se encontram no Anexo.

$$E_y(x, 0) = \frac{-\mathfrak{z}_0 I(\omega)}{\pi(k_1^2)} \int_0^\infty (u_0 - u_1) \cos(xk_x) dk_x \quad (4.1)$$

$$u_j = \sqrt{k_x^2 - k_j^2} \quad j = 0, 1 \quad (4.2)$$

$$k_0 = 0.0 \quad (4.3)$$

$$k_1 = \sqrt{-i\omega\mu_0\sigma_1}, \quad i = \text{unidade complexa} \quad (4.4)$$

$$\mathfrak{z}_0 = i\omega\mu_0, \quad \mathfrak{z}_0 = \text{impeditividade}, \quad \omega = 2\pi f$$

Para o cálculo os valores de $E_y(x, 0)$ será considerado o modelo que possui os valores de frequência, permeabilidade magnética, corrente da linha e condutividade de $f = 0.01Hz$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}H/m$, $I(w) = 1A$ e $\sigma_1 = 0.001S/m$, respectivamente.

O integrando dessa integral tem o seguinte comportamento:

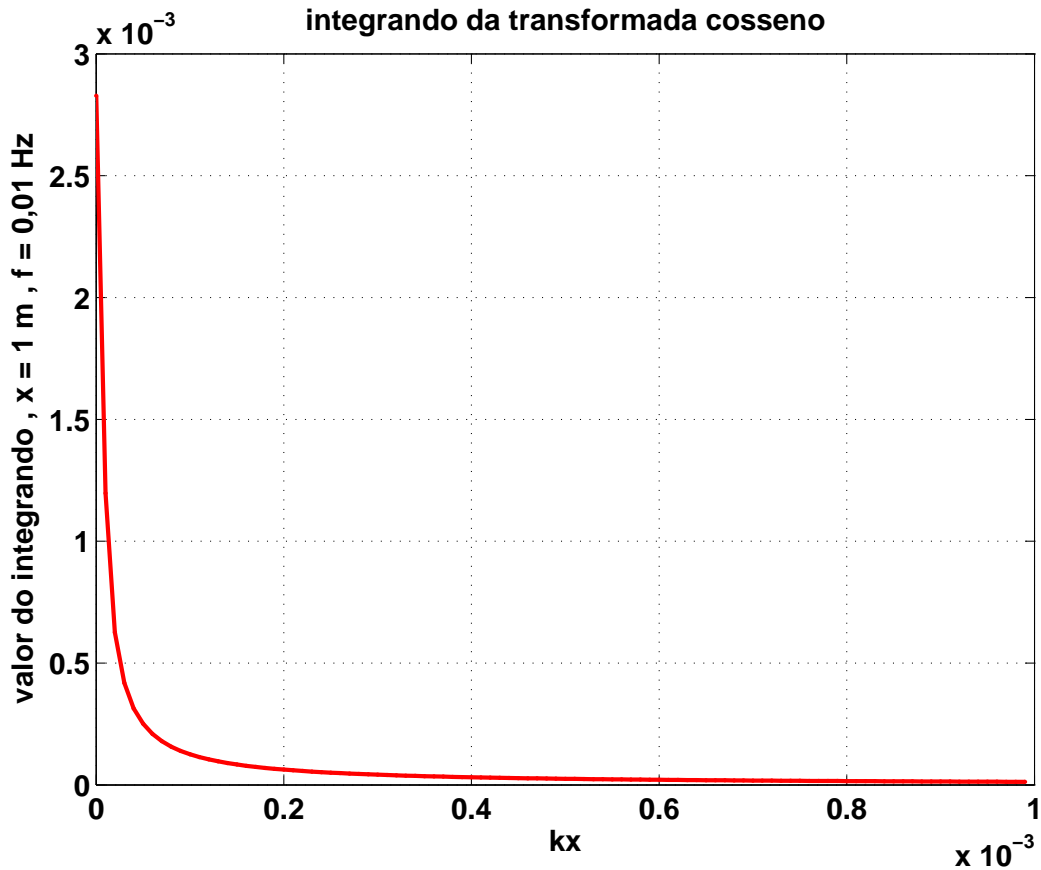


Figura 4.1: Integrando da integral da linha de corrente infinita paralela a um semi-espaço.

A solução analítica desta integral com as mesmas considerações será:

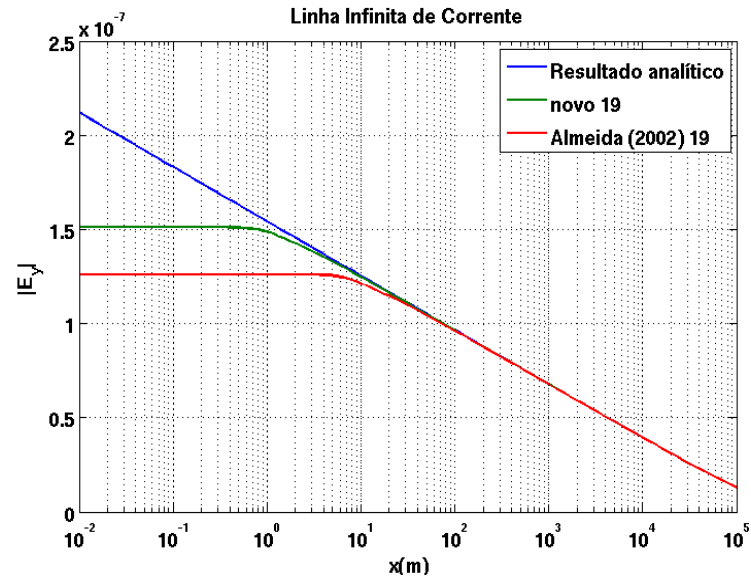
$$E_y(x, 0) = \frac{30I(\omega)}{\pi x^2 k_1} [1 - ik_1 x K_1(ik_1 x)] \quad (4.5)$$

Sendo K_1 uma *função de Bessel modificada de segunda espécie de 1ª ordem*.

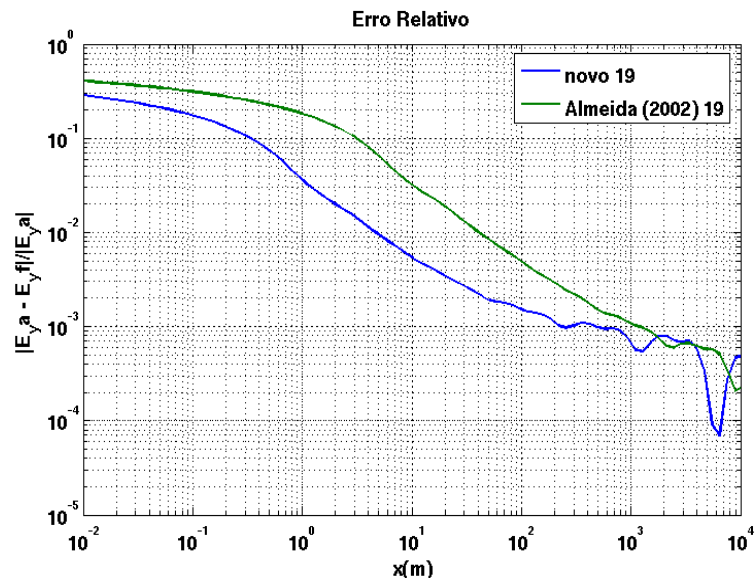
A seguir serão mostrados os resultados obtidos com os filtros, comparados com a resposta analítica.

4.1 19 PONTOS

A função de entrada foi discretizada em 50 pontos, como o filtro desejado é de 19 pontos a função de saída tem que ser discretizada em 68 pontos devido a convolução numérica.



(a)



(b)

Figura 4.2: Comparação entre o resultado analítico (E_y^a) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 19 pontos (E_y^f), sendo a frequência 0.01 Hz e a condutividade elétrica 0.001 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 19 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 19 pontos (a) Erro relativo das soluções numéricas em relação à analítica (b).

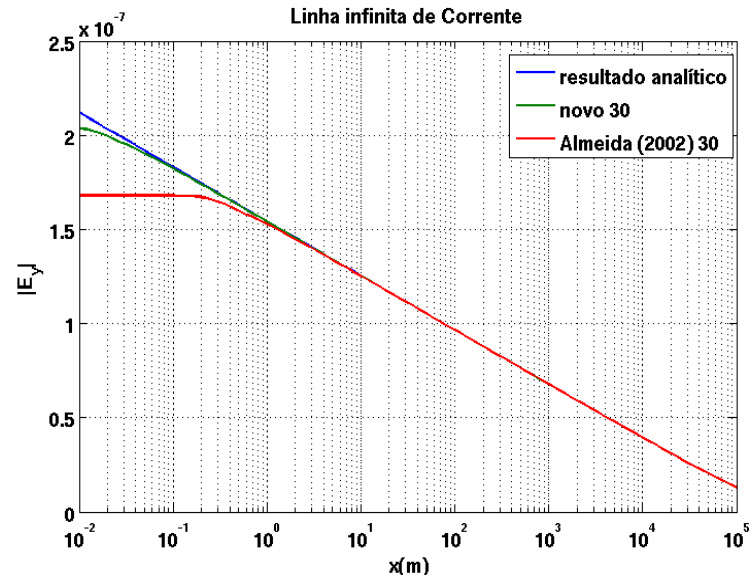
No cálculo do campo E_y o novo filtro cosseno de 19 pontos teve melhor aproximação

com o resultado analítico que o filtro de Almeida (2002) com o mesmo número de pontos, principalmente a partir 1cm até 30m (figura 4.2(a)). O campo E_y se encontra na ordem de 10^{-7}V/m , e na análise do erro relativo o comportamento do novo filtro tem menor valor de erro que o de Almeida (2002), essa diferença é evidente em pontos perto da fonte, em torno de 1m em que o novo tem erro em torno de 1 por cento enquanto que o erro do outro filtro fica em 10 por cento (figura 4.2(b)).

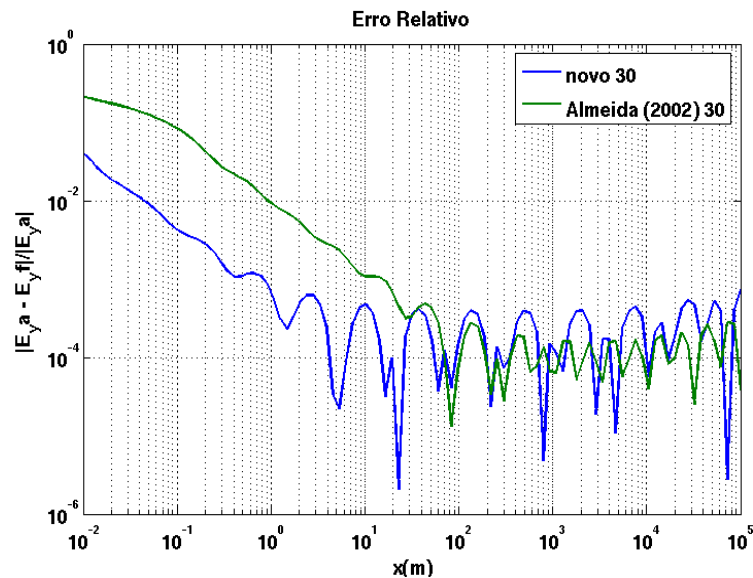
4.2 30 PONTOS

A função de entrada foi discretizada em 70 pontos, como o filtro desejado é de 30 pontos a função de saída tem que ser discretizada em 99 pontos devido a convolução numérica.

No cálculo do campo E_y o novo filtro cosseno de 30 pontos teve melhor aproximação com o resultado analítico que o filtro de Almeida (2002) com o mesmo número de pontos, mais visível entre o intervalo de 1 cm a 20 m (figura 4.3(a)). Em relação ao erro relativo a diferença torna-se mais evidente pois enquanto o novo de 30 pontos tem seus erros na ordem de 10^{-2} o de Almeida (2002) tem o seu em 10^{-1} , isso em torno de até 10 cm, o que só é obtido por Almeida (2002) com o seu filtro de 40 pontos, que será mostrado a seguir. A partir de 60 m a variação de ambos se encontram na mesma região, entre 10^{-3} e abaixo de 10^{-4} (figura 4.3).



(a)



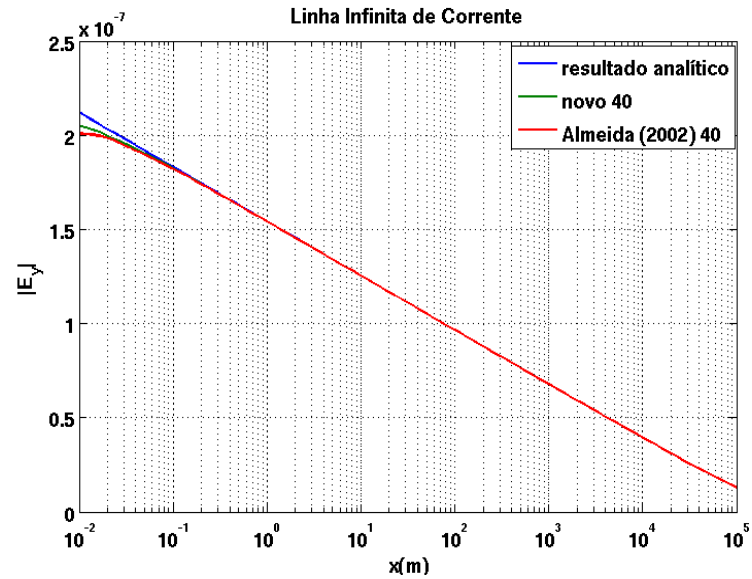
(b)

Figura 4.3: Comparação entre o resultado analítico (E_{ya}) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 30 pontos (E_{yf}), sendo a frequência 0.01 Hz e a condutividade elétrica 0.001 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 30 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 30 pontos (a) Erro relativo das soluções numéricas em relação à analítica (b).

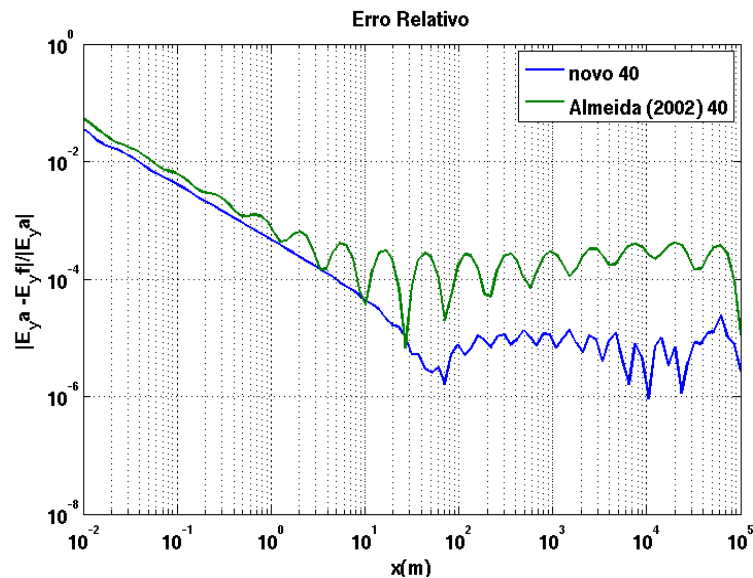
4.3 40 PONTOS

A função de entrada foi discretizada em 80 pontos, como o filtro desejado é de 40 pontos a função de saída tem que ser discretizada em 119 pontos devido a convolução numérica.

No cálculo do campo E_y o novo filtro cosseno de 40 pontos teve melhor aproximação



(a)



(b)

Figura 4.4: Comparação entre o resultado analítico (E_{ya}) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 40 pontos (E_{yf}), sendo a frequência 0.01 Hz e a condutividade elétrica 0.001 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 40 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 40 pontos (a) Erro relativo das soluções numéricas em relação à analítica (b).

com o resultado analítico que o filtro de Almeida (2002) com o mesmo número de pontos, entretanto só é visível cerca de 1 cm próximo da fonte (figura 4.4(a)). No gráfico do erro relativo da distância de 1 cm a 10 m o comportamento do novo filtro de 40 pontos está somente um pouco abaixo do de Almeida (2002), entretanto, a partir de 30 m o erro do novo filtro está em torno de 10^{-5} enquanto o de Almeida (2002) está em 10^{-4} (figura 4.4(b)).

4.4 FREQUÊNCIA DE 1 Hz

Como teste vamos considerar o mesmo modelo anterior, entretanto com uma frequência maior, de 10^{-2} para 1 Hz, dessa forma o campo decairá mais rápido. Para o cálculo os valores de $E_y(x, 0)$ será considerado o modelo que possui os valores de frequência, permeabilidade magnética, corrente da linha e condutividade de $f = 1.0\text{Hz}$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\text{H/m}$, $I(w) = 1.0\text{A}$ e $\sigma_1 = 0.001\text{S/m}$, respectivamente.

O integrando dessa integral tem o seguinte comportamento:

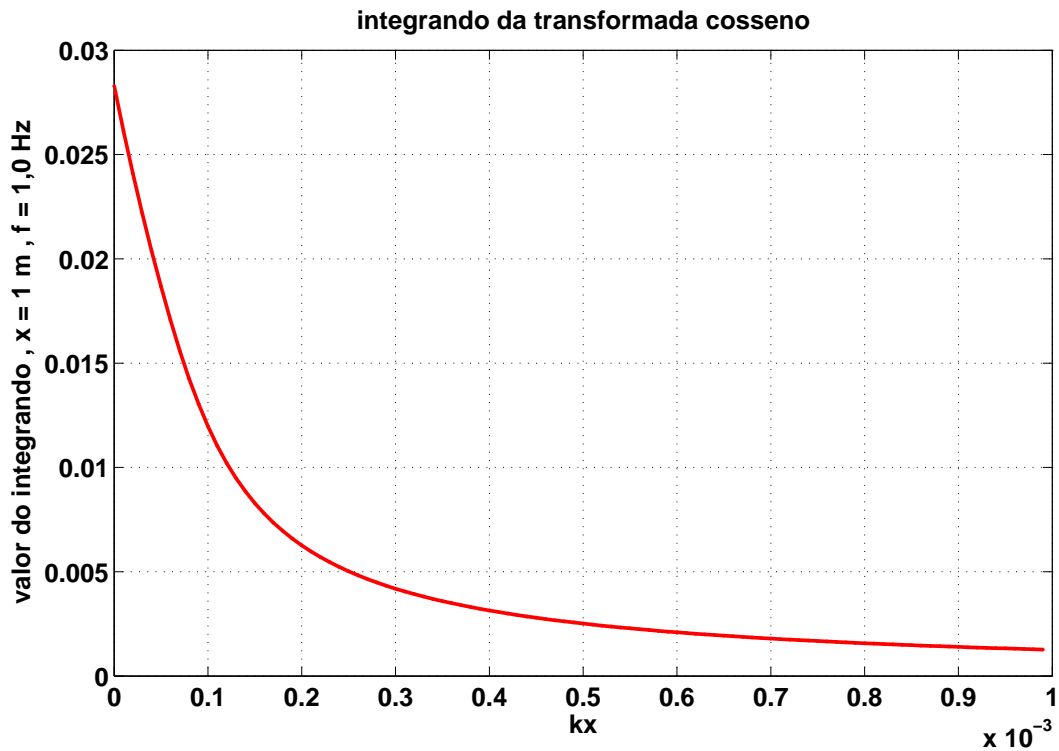


Figura 4.5: Integrando da integral da linha de corrente infinita paralela a um semi-espço com frequência de 1 Hz.

4.5 19 PONTOS

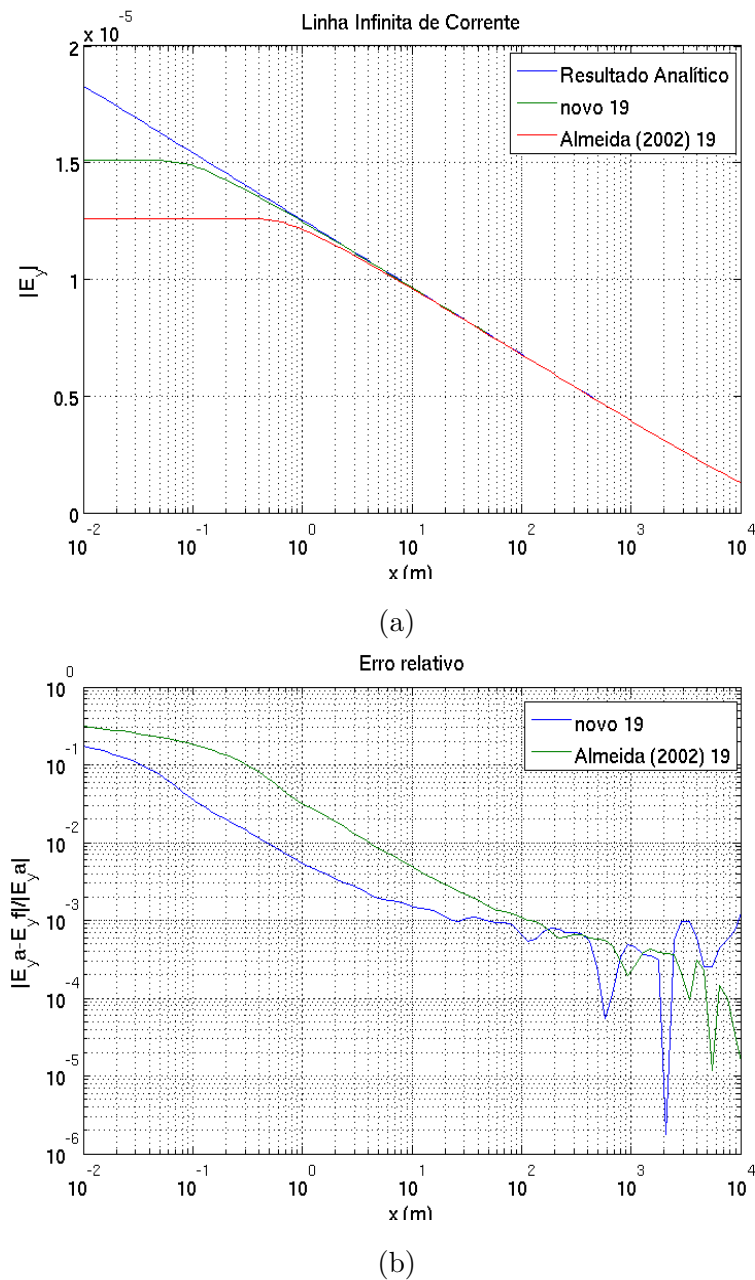
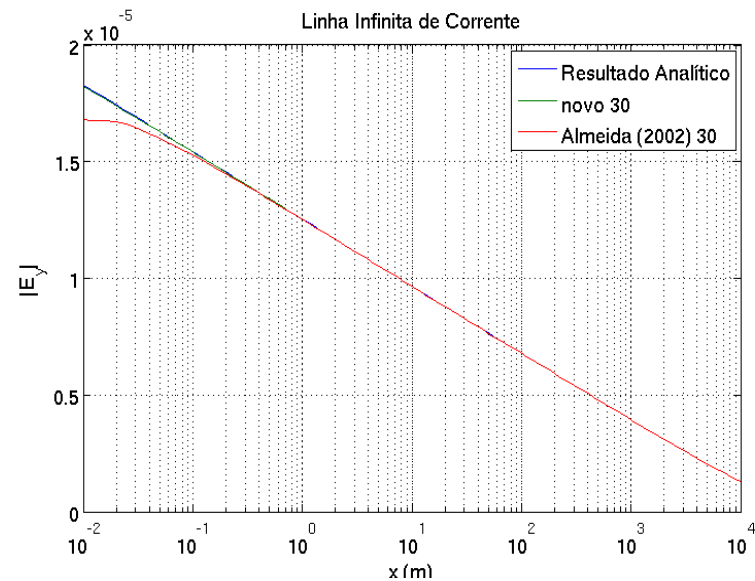


Figura 4.6: Comparação entre o resultado analítico (E_y^a) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 19 pontos (E_y^f), sendo a frequência 1.0 Hz e a condutividade elétrica 0.001 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 19 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 19 pontos (a) Erro relativo das soluções numéricas em relação à analítica (b).

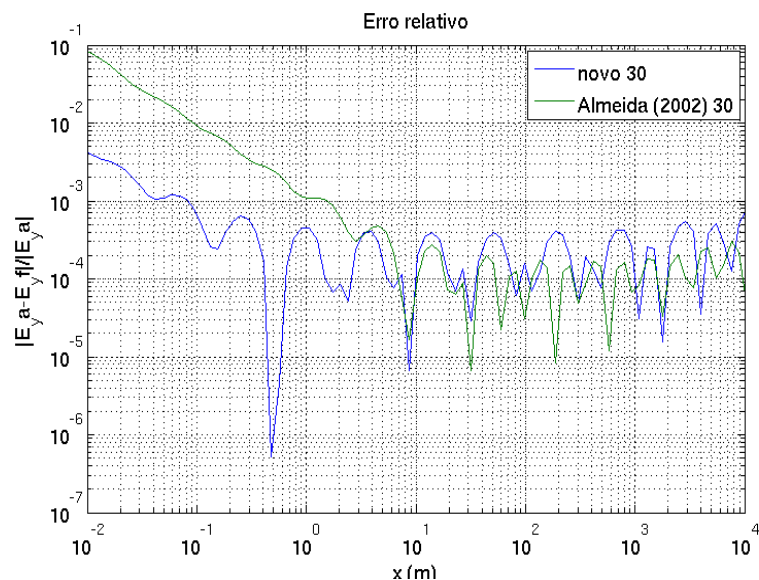
No cálculo do campo E_y o novo filtro cosseno de 19 pontos teve melhor aproximação com o resultado analítico que o filtro de Almeida (2002) com o mesmo número de pontos para as distâncias mais próximas da fonte (figura 4.6(a)). O campo E_y se encontra na ordem de 10^{-5} , e na análise do erro relativo o comportamento do novo filtro tem menor

valor de erro que o de Almeida (2002), essa diferença é evidente no intervalo de 1 cm a 1 km, sendo que o de Almeida (2002) se demonstrou um pouco melhor para distâncias acima de 2 e abaixo de 10 km (figura 4.6).

4.6 30 PONTOS



(a)



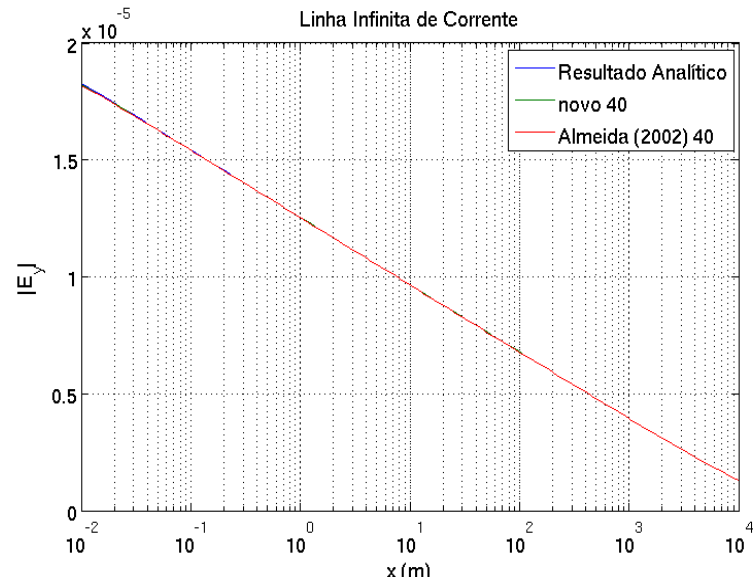
(b)

Figura 4.7: Comparação entre o resultado analítico (E_y^a) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 30 pontos (E_y^f), sendo a frequência 1.0 Hz e a condutividade elétrica 0.001 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 30 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 30 pontos (a) Erro relativo das soluções numéricas em relação à analítica (b).

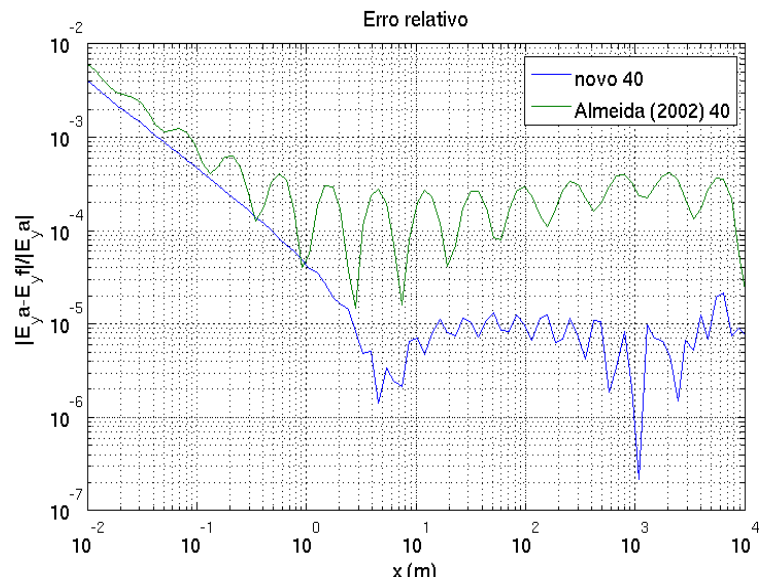
No cálculo do campo E_y o novo filtro cosseno de 30 pontos teve melhor aproximação com o resultado analítico que o filtro de Almeida (2002) com o mesmo número de pontos, mais visível no intervalo próximo da fonte (figura 4.7(a)). Em relação ao erro relativo, o novo filtro começa com um erro bem abaixo do de Almeida (2002) até cerca de 10 m. A partir daí a variação de ambos se encontram na mesma região, entre 10^{-3} e abaixo de 10^{-4} (figura 4.7).

4.7 40 PONTOS

No cálculo do campo E_y o novo filtro cosseno de 40 pontos teve melhor aproximação com o resultado analítico que o filtro de Almeida (2002) com o mesmo número de pontos, entretanto não é tão visível na figura 4.8(a). Já no gráfico do erro relativo da distância de 1 cm a 1 m o comportamento do novo filtro de 40 pontos está somente um pouco abaixo do de Almeida (2002), entretanto, a partir de 3 m o erro do novo filtro está em torno de 10^{-5} enquanto o de Almeida (2002) está entre 10^{-3} e 10^{-4} (figura 4.8(b)).



(a)



(b)

Figura 4.8: Comparação entre o resultado analítico (E_y^a) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 40 pontos (E_y^f), sendo a frequência 1.0 Hz e a condutividade elétrica 0.001 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 40 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 40 pontos (a) Erro relativo das soluções numéricas em relação à analítica (b).

4.8 CONDUTIVIDADE DE 1S/m

Para outro teste vamos considerar o primeiro modelo, entretanto com uma condutividade maior, de 10^{-3} para 10^{-2} sendo assim o campo decai mais rápido. Para o cálculo os valores de $E_y(x, 0)$ será considerado o modelo que possui os valores de frequência, permeabilidade magnética, corrente da linha e condutividade de $f = 0.01\text{Hz}$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\text{H/m}$,

$I(w) = 1.0A$ e $\sigma_1 = 0.01S/m$, respectivamente.

O kernel dessa integral tem o seguinte comportamento:

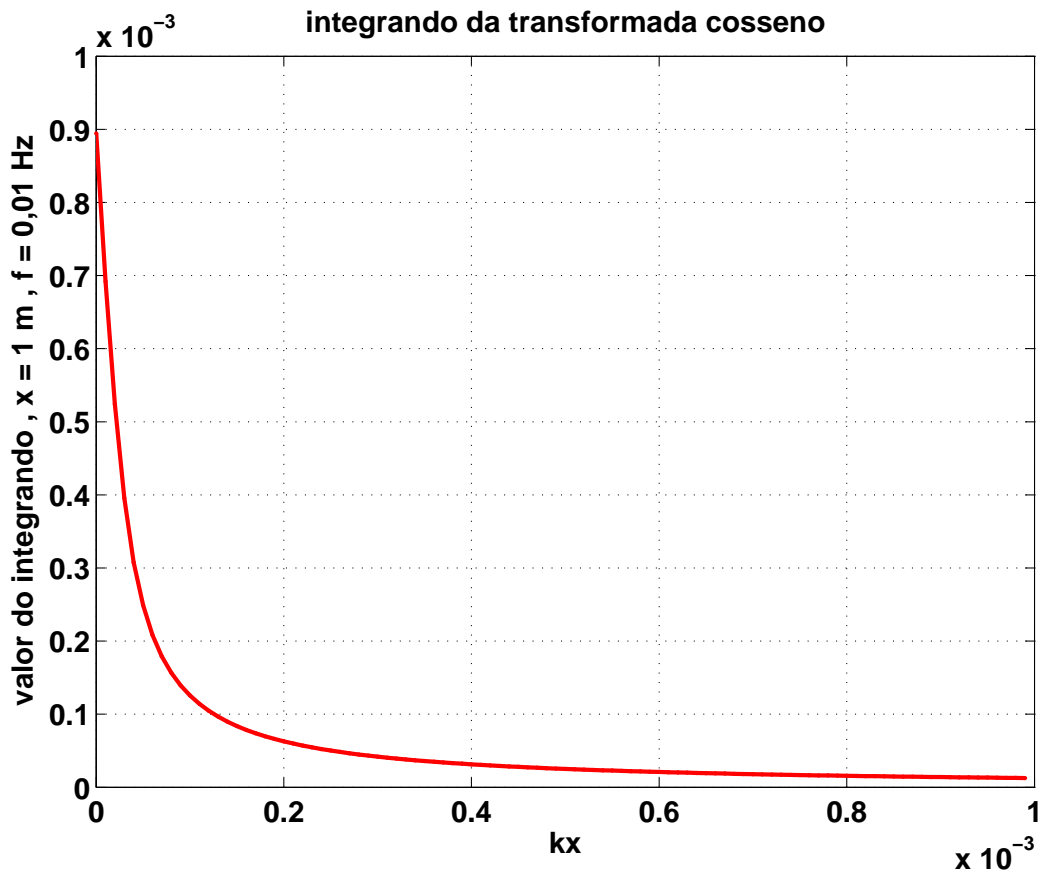
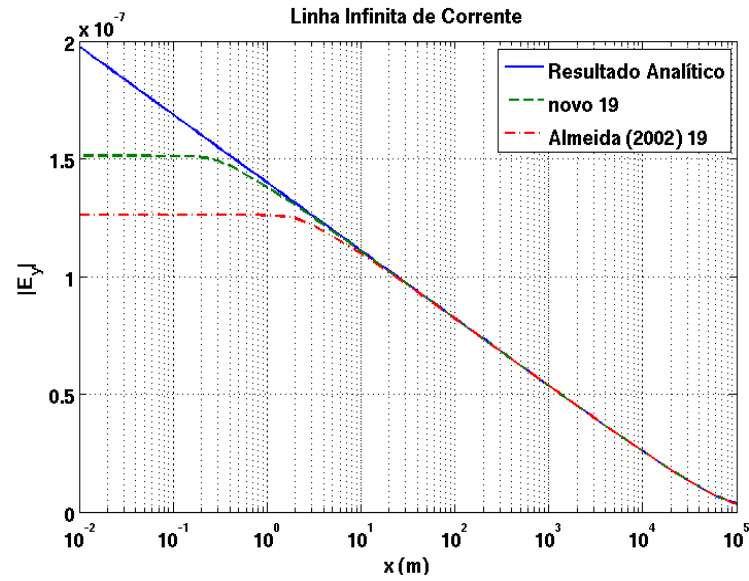


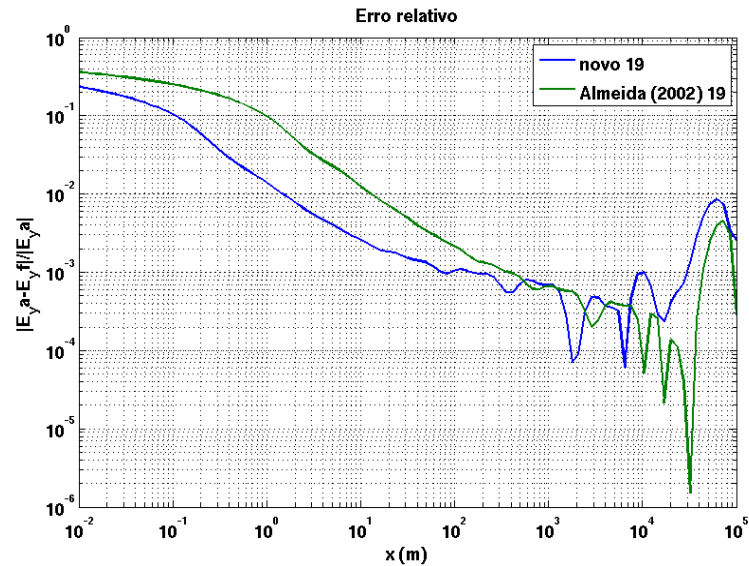
Figura 4.9: Integrando da integral da linha de corrente infinita paralela a um semi-espço com condutividade de 0.01 S/m

4.9 19 PONTOS

No cálculo da campo E_y o novo filtro cosseno de 19 pontos teve melhor aproximação com o resultado analítico que o filtro de Almeida (2002) com o mesmo número de pontos para as distâncias mais próximas da fonte (figura 4.10(a)). O campo E_y se encontra na ordem de 10^{-7} , e na análise do erro relativo o comportamento do novo filtro tem menor valor de erro que o de Almeida (2002), essa diferença é evidente no intervalo de 1 cm a 1 km, sendo que o de Almeida (2002) se mostrou melhor para distâncias acima de 6 km (figura 4.10).



(a)

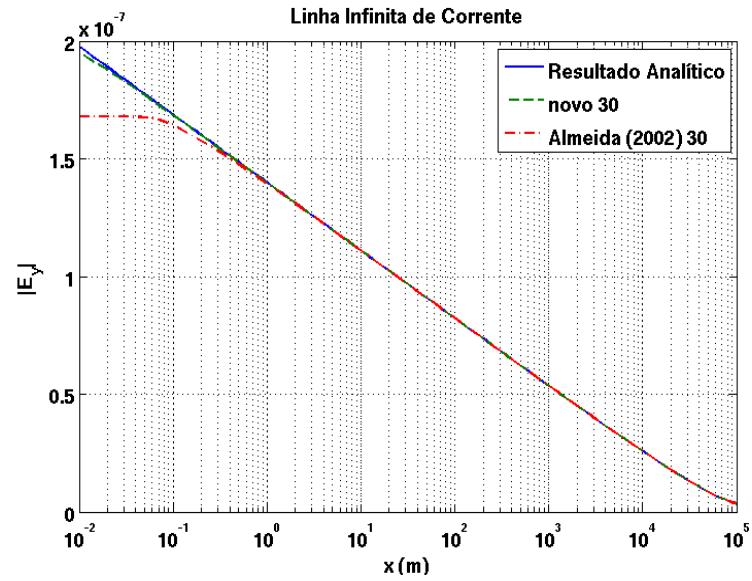


(b)

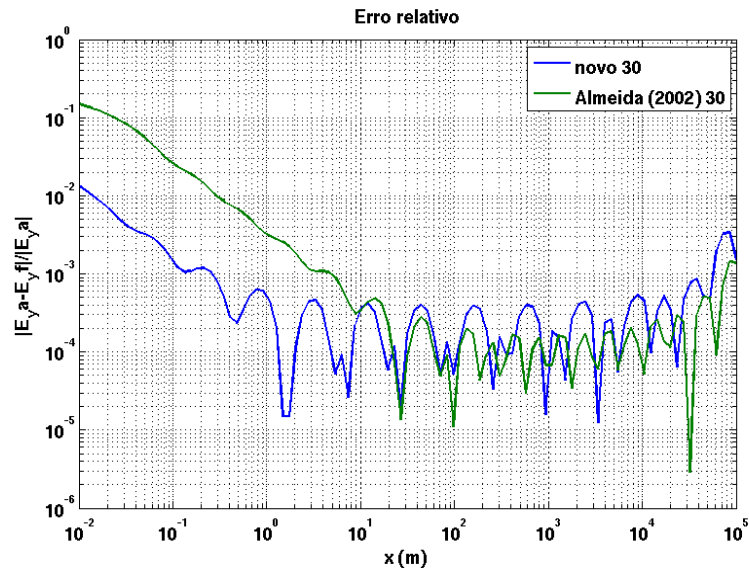
Figura 4.10: Comparação entre o resultado analítico ($E_{y,a}$) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 19 pontos ($E_{y,f}$), sendo a frequência 0.01 Hz e a condutividade elétrica 0.01 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 19 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 19 pontos (a) Erro relativo das soluções numericas em relação analítica (b).

4.10 30 PONTOS

No cálculo da campo E_y o novo filtro cosseno de 30 pontos teve melhor aproximação com o resultado analítico que o filtro de Almeida (2002) com o mesmo número de pontos, mais visível no intervalo próximo da fonte (figura 4.11(a)). Em relação ao erro relativo, o novo começa com um erro bem abaixo do de Almeida (2002) até cerca de 10 m. A



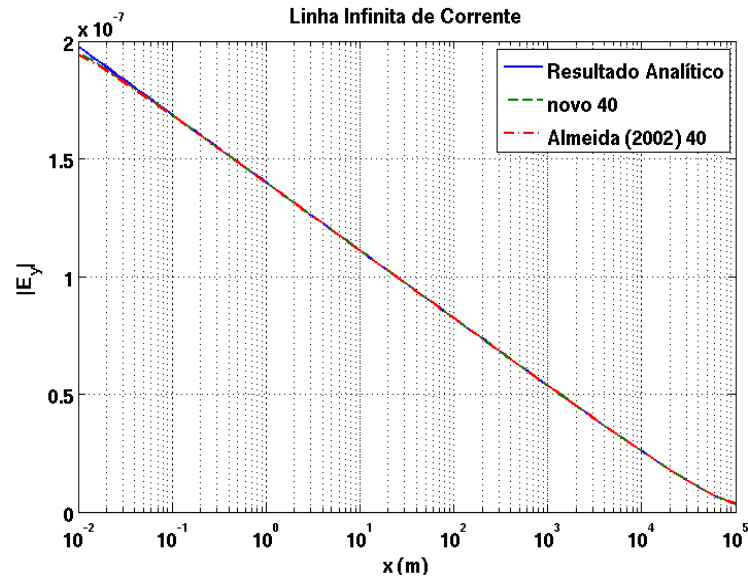
(a)



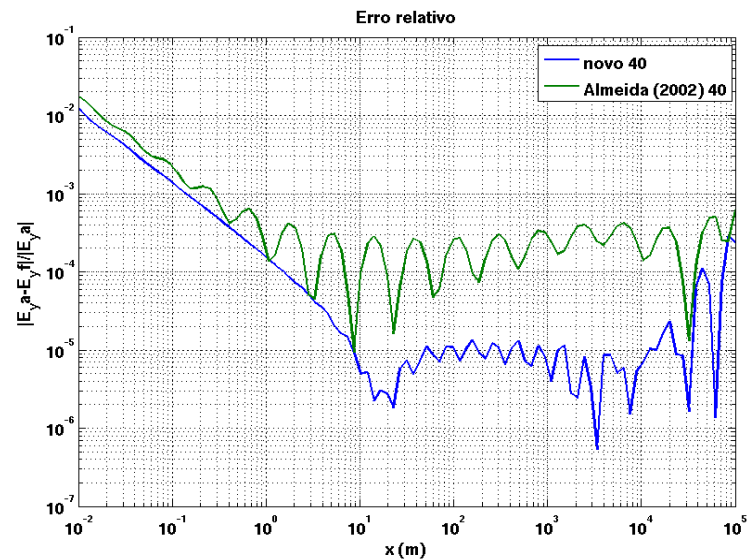
(b)

Figura 4.11: Comparação entre o resultado analítico (E_{ya}) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 30 pontos (E_{yf}), sendo a frequência 0.01 Hz e a condutividade elétrica 0.01 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 30 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 30 pontos (a) Erro relativo das soluções numericas em relação analítica (b).

partir daí a variação de ambos se encontram na mesma região, entre 10^{-3} e abaixo de 10^{-4} (figura 4.11(b)).



(a)



(b)

Figura 4.12: Comparação entre o resultado analítico ($E_{y,a}$) e o resultado numérico com os filtros cosseno de 40 pontos ($E_{y,f}$), sendo a frequência 0.01 Hz e a condutividade elétrica 0.01 S/m. Comparação entre o resultados analítico e os numéricos do filtro cosseno de 40 pontos de Almeida (2002) e o novo cosseno de 40 pontos (a) Erro relativo das soluções numéricas em relação analítica (b).

4.11 40 PONTOS

No cálculo da campo E_y o novo filtro cosseno de 40 pontos teve melhor aproximação com o resultado analítico que o filtro de Almeida (2002) com o mesmo número de pontos, entretanto não é tão visível na figura 4.12(a). No gráfico do erro relativo da distância de 1 cm a 1 m o comportamento do novo filtro de 40 pontos está somente um pouco abaixo

do de Almeida (2002), entretanto, a partir de 10 m o erro do novo filtro está em torno de 10^{-5} enquanto o de Almeida (2002) está ente 10^{-3} e 10^{-4} (figura 4.12(b)).

4.12 COMPARAÇÃO

O aumento da frequência e da condutividade elétrica fazem com que o campo elétrico decaia mais rápido a zero com o aumento da distância em x . No segundo modelo no qual foi aumentada a frequência e mantidos os outros parâmetros foi observado um aumento do valor do módulo do campo que é explicado pelo fato de que nestas condições o coeficiente de reflexão relacionado à interface é maior e mais energia penetra no meio condutivo, ou seja, na frequência mais alta a proporção da energia refletida na interface é maior, como se vê comparando as figuras 4.4 (a) e (b) e as figuras 4.8 (a) e (b). Com o aumento da condutividade elétrica o resultado numérico é mais próximo do resultado analítico, como visto nas figuras 4.3 e 4.4 (a) e (b) e as figuras 4.11 e 4.12 (a) e (b).

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho fizemos o cálculo de novos filtros cosseno de 19, 30 e 40, com a utilização de uma pequena mudança na escolha do melhor filtro proposta por D.Guptasarma (1982), e uma maior discretização no espaço dos parâmetros que definem a construção do filtro.

Na comparação dos resultados numéricos com o analítico da integral do campo E_y gerado por uma linha infinita de corrente paralela a um semi-espaço, os novos filtros tiveram uma maior aproximação que os apresentados em Almeida (2002).

Como continuação dessa pesquisa é possível explorar ainda mais a computação para uma busca sistemática dos parâmetros do filtro, fazer um estudo mais profundo sobre os efeitos no filtro quando aumentamos ou diminuimos os intervalos sugeridos para cada parâmetro, assim como definir uma nova forma de escolha dos melhores filtros. Direcionando a aplicação do filtro para a Geofísica, principalmente para as fontes eletromagnéticas. O uso das próprias integrais de interesse podem melhorar as respostas numéricas, assim como usar as distâncias ou profundidades mais comuns como dados de entrada para o cálculo do filtro para que o resultado se ajute melhor nesse intervalo.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, F. L. D. 2002. Filtros otimizados para transformadas seno, cosseno e de hankel j_0 , j_1 e j_2 . Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará.
- ANDERSON, W. L. 1979. computer program, numerical integration of related hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filter. *Geophysics* 44, 1287–1305.
- BRIGHAM, E. O. 1988. The Fast Fourier Transform and its Applications. Prentice Hall.
- CHRISTENSEN, N. 1990. Optimized fast hankel transform filters. *Geophysical Prospecting* 38, 545–568.
- D.GUPTASARMA 1982. Optimization of short digital linear filters for increased accuracy. *Geophysical Prospecting* 30, 501–514.
- GUPTASARMA, D. & SINGH, B. 1997. New digital linear filter for hankel j_0 and j_1 tranforms. *Geophysical Prospecting* 45, 745–762.
- KONG, F. 2007. Hankel transform filters for dipole antenna radiation in a conductive medium. *Geophysical Prospecting* 55, 83 – 89.
- MOHSEN, A. A. . & HASHISH, E. . A. . 1994. The fast hankeltransform. *Geophysical Prospecting* 42, 131–139.
- NISSEN, J. & ENMARK 1986. An optimized digital filter for the fourier transform. *Geophysical Prospecting* 34, 897–903.
- PIRES, M. A. D. F. 2002. Ee 05 princípios de telecomunicações. Disponível em: <http://www.ele.ita.br/fpires/AULA204.ppt/> . Acesso em 15 mar. 2010.
- RIJO, L. 1993. An optimized digital filter for cossine transform. *Revista Brasileira de Geofisica* 10, 7–20.
- RIJO, L. 2004. Electrical geophysics: 1-d earth modeling. Disponível em: <http://www.rijo.pro.br> . Acesso em 10 fev. 2009.

ANEXOS

ANEXO A - ABSCISSAS E PESOS DO FILTRO COSSENO DE 19 PONTOS

Abscissas	Pesos
-11.8099724825691	1.007235909772942E-005
-11.0136489412912	1.006868263477685E-005
-10.2173254000133	3.048620846315822E-005
-9.42100185873535	6.449204552060950E-005
-8.62467831745744	1.407980525494781E-004
-7.82835477617953	3.226166701361826E-004
-7.03203123490162	6.874241520280843E-004
-6.23570769362371	1.593963259541561E-003
-5.43938415234580	3.362650678686240E-003
-4.64306061106789	7.878546455114630E-003
-3.84673706978998	1.642620950830006E-002
-3.05041352851207	3.895374220462195E-002
-2.25408998723416	7.967894865421880E-002
-1.45776644595625	0.188353627872789
-0.661442904678337	0.336471563930357
0.134880636599572	0.428358543885122
0.931204177877483	-1.59026581112999
1.72752771915539	0.568101497857635
2.52385126043330	-8.605398980201910E-002

ANEXO B - ABSCISSAS E PESOS DO FILTRO COSSENO DE 30 PONTOS

Abscissas	Pesos
-16.0000000000000	1.595151049691087E-007
-15.3450254187133	8.672991530476508E-008
-14.6900508374267	2.356451880401275E-007
-14.0350762561400	7.080606042400285E-007
-13.3801016748533	6.075781327651792E-007
-12.7251270935666	2.717218106514918E-006
-12.0701525122800	2.358794990760716E-006
-11.4151779309933	9.703717595276144E-006
-10.7602033497066	9.498315602457830E-006
-10.1052287684200	3.455842628697549E-005
-9.45025418713329	3.772130769009134E-005
-8.79527960584662	1.235917514712432E-004
-8.14030502455995	1.477348678335565E-004
-7.48533044327328	4.439754684169963E-004
-6.83035586198661	5.723671622781273E-004
-6.17538128069994	1.601380899172496E-003
-5.52040669941327	2.198956283439593E-003
-4.86543211812659	5.796989396482771E-003
-4.21045753683993	8.391517405249399E-003
-3.55548295555325	2.104662259206107E-002
-2.90050837426658	3.180755465598514E-002
-2.24553379297991	7.629757944276885E-002
-1.59055921169324	0.117676430188561
-0.935584630406570	0.260453323746589
-0.280610049119900	0.319270821270248
0.374364532166773	0.172930354675564
1.02933911345344	-1.71239260892241
1.68431369474011	0.849174865945640

2.33928827602679	-0.182600520826419
2.99426285731345	2.805778109647008E-002

ANEXO C - ABSCISSAS E PESOS DO FILTRO COSSENO DE 40 PONTOS

Abscissas	Pesos
-16.0000000000000	2.135364830386926E-007
-15.4470588152899	-1.067977698569746E-007
-14.8941176305799	3.974290028872296E-007
-14.3411764458698	1.578995119488498E-007
-13.7882352611598	6.910930507262291E-007
-13.2352940764497	9.041323176053153E-007
-12.6823528917397	1.771198247726692E-006
-12.1294117070296	2.952639164736260E-006
-11.5764705223196	5.205327407807098E-006
-11.0235293376095	9.017561177449965E-006
-10.4705881528995	1.567085581436726E-005
-9.91764696818941	2.728405760358686E-005
-9.36470578347936	4.734012635285070E-005
-8.81176459876930	8.244959137197055E-005
-8.25882341405925	1.430712113911959E-004
-7.70588222934919	2.491226752841531E-004
-7.15294104463914	4.323950066926196E-004
-6.59999985992908	7.527517976241734E-004
-6.04705867521903	1.306723224891444E-003
-5.49411749050898	2.274682219385610E-003
-4.94117630579892	3.948510260643992E-003
-4.38823512108887	6.874222305895376E-003
-3.83529393637882	1.192663092015501E-002
-3.28235275166876	2.076845360732494E-002
-2.72941156695871	3.594939373253819E-002
-2.17647038224865	6.246251997199842E-002
-1.62352919753860	0.106588101506071
-1.07058801282855	0.179360530866436

-0.517646828118494	0.270521409013829
3.529435659156022E-002	0.297439113855318
0.588235541301614	-0.243475726818063
1.14117672601167	-1.63317313576061
1.69411791072172	1.14732562413748
2.24705909543178	-0.340852043797891
2.80000028014183	9.252388454727893E-002
3.35294146485188	-3.436661718804299E-002
3.90588264956194	1.632728991026667E-002
4.45882383427199	-8.095668156417424E-003
5.01176501898205	3.433128065904244E-003
5.56470620369210	-8.909180300796896E-004